

Exponenciális és logaritmikus kifejezések

1) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\frac{2x^2 + x - 10}{2^{x-1} - 2} = 0$ (4 pont)

b) $\sqrt{x+16} + \sqrt{x-9} = 5$ (4 pont)

c) $\lg(x^2 + x - 6) = \lg(1 - x^2)$ (4 pont)

d) $\sin x - 1 = \sqrt{\lg(\cos^2 x - 1,5 \cos x)}$ (4 pont)

2) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $(x-2) \cdot \lg(x^2 - 8) = 0$ (5 pont)

b) $x^2 - |x| = 6$ (5 pont)

3) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2$ (5 pont)

b) $2^x = 3^{2x+1}$ (6 pont)

4) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = \sin \frac{\pi}{2} + 2^{\log_2 9} \quad (11 \text{ pont})$$

5)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!
 $x^2 = |x-6|$ (5 pont)

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!
$$\left. \begin{aligned} \lg(x+y) &= 2 \lg x \\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1) \end{aligned} \right\} \quad (9 \text{ pont})$$

6) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $0,5^{2-\log_{0,5} x} = 3$, ahol $x > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ (4 pont)

b) $7 + 6 \log_x \frac{1}{2} = \log_2 x$, ahol $1 < x \leq 2$ és $x \in \mathbb{R}$ (7 pont)

7) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0$, $x \neq 1$ és $y > 0$, $y \neq 1$.

$$\left. \begin{aligned} \log_x y + \log_y x &= 2 \\ \sin(2x+3y) + \sin(4x+y) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (13 \text{ pont})$$

8) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left. \begin{aligned} \log_x(x^2 y^3) + \log_y(x^3 y) &= 9 \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16 \text{ pont})$$

- 9) Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!
- a) $\cos(\log_2 \sqrt{x})$ (3 pont)
- b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$ (5 pont)
- c) $\log_{\sqrt{x}}(\cos^2 x)$ (5 pont)
- 10) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!
- a) $\sqrt{x+2} = -x$ (4 pont)
- b) $2^{2(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}}$ ($x \neq -4$) (7 pont)
- 11)
- a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3 - 5x^2 - 3x = 0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! (5 pont)
- b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
 $2\cos^3 x - 5\cos^2 x - 3\cos x = 0$ (6 pont)
- c) Mutassa meg, hogy a $2 \cdot 8^x + 7 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke! (5 pont)
- 12) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!
- a) $2\sin x - 2\sin^2 x = \cos^2 x$ (5 pont)
- b) $25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}$ (7 pont)
- 13) a) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y pozitív valós számok!
- $$\left. \begin{array}{l} x + y = 0,2 \\ \frac{\lg x + \lg y}{2} = \lg \frac{x + y}{2} \end{array} \right\} \quad (6 \text{ pont})$$
- b) Oldja meg a $[-\pi; \pi]$ halmazon a $2\sin^2 x - \cos x = 2$ egyenletet! (6 pont)
- 14) a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
- $$25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 50 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} + 30 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} = 81 \quad (7 \text{ pont})$$
- b) Igazolja, hogy $\frac{\lg 5^x + \lg 5^{-x}}{2} \leq \lg \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$ ($x \in \mathbb{R}$). (7 pont)
- 15) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!
- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 324$ (6 pont)
- b) $\sqrt{6x-24} = \sqrt{2x-7} - 1$ (7 pont)
- 16) Oldja meg az alábbi két egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
- a) $\cos x \geq \frac{1}{2}$ (3 pont)
- b) $\sqrt{\frac{x}{5}} - 4 < 20$ (4 pont)
- c) Hány olyan egész szám van, amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek?
 $\log_{0,5}(2x+100) \geq -8$ (7 pont)

17) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{-2x+6} = x+1$ (5 pont)

b) $2\log_4 x^2 + 3\log_4 x^3 = \log_4 x^4 + \log_4 8^9$ (6 pont)

18) a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$(2^x - 3)^2 = 2^{x+1} + 9$ (7 pont)

Legyen $f(x) = x^2 - 9x + 14$, ahol x valós szám.

Tekintsük a következő állítást: „Ha $x > 7$, akkor $f(x) > 0$.”

b) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja! (4 pont)

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja! (3 pont)